4/4/16

Ευκλείδιοι Χώροι

E είναι ένας $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος

Ορισμός: Ένα εσωτερικό γινόμενο στον E είναι μία απεικόνιση $<\,,\,>: E \times E \to \mathbb{R}$

$$(\vec{\alpha},\vec{\beta}) \to <\vec{\alpha},\vec{\beta}>$$

Έτσι ώστε:

1. (Συμμετρία) $<\vec{\alpha},\vec{\beta}> = <\vec{\beta},\vec{\alpha}> \ \forall \vec{\alpha},\vec{\beta} \in E$
2. (Διγραμμικότητα):
$<\vec{\alpha_1}+\vec{\alpha_2},\vec{\beta}> = <\vec{\alpha_1},\vec{\beta}> + <\vec{\alpha_2},\vec{\beta}>$
$<\lambda\vec{\alpha},\vec{\beta}> = \lambda<\vec{\alpha},\vec{\beta}>$
$<\vec{\alpha},\vec{\beta_1}+\vec{\beta_2}> = <\vec{\alpha},\vec{\beta_1}> + <\vec{\alpha},\vec{\beta_2}>$
$<\vec{\alpha},\lambda\vec{\beta}> = \lambda<\vec{\alpha},\vec{\beta}>$
3. (Θετικά ορισμένο) $<\vec{\alpha},\vec{\alpha}> \geq 0$ και $<\vec{\alpha},\vec{\alpha}> = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \vec{0}$

Ορισμός: Ένας Ευκλείδειος Χώρος είναι ένα ζεύγος $(E, <\,>)$, όπου E είναι $\mathbb{R}$-Δ.Χ. και $<\,,\,>$ είναι εσωτερικό γινόμενο.

Παραδείγματα:

1. $E = \mathbb{R}^n$ $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ \alpha_n)$ και $\vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \ , \beta_n)$
$<\vec{\alpha},\vec{\beta}> = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ + \alpha_n\beta_n$
Θέλω να αποδείξω ότι είναι κανονικό εσωτερικό γινόμενο.
1) $<\vec{\alpha},\vec{\beta}> = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots + \alpha_n\beta_n = \beta_1\alpha_1 + \beta_2\alpha_2 + \ldots + \beta_n\alpha_n = <\vec{\beta},\vec{\alpha}>$

2) $<\vec{\alpha}+\vec{\alpha}',\beta> = (\alpha_1+\alpha_1')\beta_1 + (\alpha_2+\alpha_2')\beta_2 + \ + (\alpha_n+\alpha_n')\beta_n =$
$= \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ + \alpha_n\beta_n + \alpha_1'\beta_1 + \alpha_2'\beta_2 + \ldots + \alpha_n'\beta_n = <\vec{\alpha},\vec{\beta}> + <\vec{\alpha}',\vec{\beta}>$

$<\lambda\vec{\alpha},\beta> = (\lambda\alpha_1)\beta_1 + (\lambda\alpha_2)\beta_2 + \ + (\lambda\alpha_n)\beta_n$
$= \lambda(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ + \alpha_n\beta_n) = \lambda<\vec{\alpha},\vec{\beta}>$

$<\vec{a}, \vec{\beta}+\vec{\beta}'> = <\vec{\beta}+\vec{\beta}', \alpha> = <\vec{b}, \vec{\alpha}> + <\vec{b}', \vec{\alpha}> =$
$= <\vec{a}, \vec{\beta}>' + <\vec{a}, \vec{\beta}'>$
$<$

$<\vec{a}, \lambda\vec{\beta}> = <\lambda\vec{\beta}, \vec{a}> = \lambda <\vec{\beta}, \vec{\alpha}> = \lambda <\vec{\alpha}, \vec{\beta}>$

3) (Θετικά ορισμένη)
$<\vec{a}, \vec{a}> = a_1a_1 + a_2a_2 + \quad + a_na_n = a_1^2 + a_2^2 + \quad + a_n^2 \geq 0$
Έστω $<\vec{a}, \vec{a}> = 0 \Rightarrow a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = 0 \Rightarrow$
$a_1 = 0, a_2 = 0, \quad, a_n = 0 \Rightarrow \vec{\alpha} = \vec{0}$
Άρα το R^n εφοδιασμένο με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο είναι Ευκλείδειος χώρος.

$<\vec{a}, \vec{\beta}> = a_1\beta_1 + \quad + a_n\beta_n = (a_1 \ a_2 \ \ a_n)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_n \end{pmatrix}$

Παράδειγμα 2
R^n, $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n \in R^n$ $\lambda_i > 0$
$<\vec{a}, \vec{\beta}> = \lambda_1 a_1\beta_1 + \lambda_2 a_2\beta_2 \quad + \lambda_n a_n\beta_n$
i) συμμετρική
ii) διγραμμική
iii) Θετικά Ορισμένη

iii) $<\vec{\alpha}, \vec{\alpha}>' = \lambda_1 a_1 a_1 + \lambda_2 a_2 a_2 + \quad + \lambda_n a_n a_n$
$= \lambda_1 a_1^2 + \lambda_2 a_2^2 + \quad + \lambda_n^2 a_n \geq 0$
Έστω $<\vec{a}, \vec{a}>' = 0 \Rightarrow \lambda_1 a_1^2 + \lambda_2 a_2^2 + \quad + \lambda a_n^2 = 0 \Rightarrow$
$a_1 = a_2 = a_n = 0 \Rightarrow \vec{\alpha} = \vec{0}$

$$\langle \vec{a}, \vec{\beta} \rangle = (a_1 \; a_2 \; a_n)^{1\times n} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα 3

$E = \mathbb{R}^{n\times n}$

$\langle A, B \rangle = Tr(A, B^t)$

- Θα δ.ο. $\langle A, B \rangle = Tr(A, B^t) = \dots = Tr(BA^t) = \langle B, A \rangle$

$\langle A, B \rangle = Tr(A, B^t) = Tr((A, B^t))^t = Tr((B^t)^t \cdot A^t) =$
$= Tr(B \cdot A^t) = \langle B, A \rangle$

- Θα δ.ο: $\langle A_1 + A_2, B \rangle = \langle A_1, B \rangle + \langle A_2, B \rangle$

$\langle A_1 + A_2, B \rangle = Tr((A_1 + A_2) B^t) = Tr(A_1 B^t + A_2 B^t) =$
$= Tr(A_1 B^t) + Tr(A_2 B^t) = \langle A_1, B \rangle + \langle A_2, B \rangle$

$\langle \lambda A, B \rangle = Tr((\lambda A) \cdot B^t) = Tr(\lambda \cdot A B^t) = \lambda \, Tr(A \cdot B^t) =$
$\lambda \langle A, B \rangle$

$\langle A, B_1 + B_2 \rangle = \quad \dots \quad = \langle A, B_1 \rangle + \langle A, B_2 \rangle$
$\langle A, \lambda B \rangle = \quad \dots \quad = \lambda \langle A, B \rangle$

(Θετικό ορισμένο) $\langle A, A \rangle = Tr(A \cdot A^t) =$

$$= Tr \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & & a_{n2} \\ a_{1n} & a_{2n} & & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{12}^2 + \dots + a_{1n}^2 & & \\ & a_{21}^2 + a_{22}^2 + \; + a_{2n}^2 & \\ & & a_{n1}^2 + a_{n2}^2 + \dots + a_{nn}^2 \end{pmatrix}$$

$= a_{11}^2 + a_{12}^2 + \quad + a_{1n}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2 + \quad + a_{2n}^2 + \dots + \quad + a_{nn}^2 \geq 0$

Έστω $\langle A, A \rangle = 0 \Rightarrow a_{11}^2 + a_{12}^2 + \quad + a_{ij} \quad + a_{nn}^2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{11} = a_{12} = \quad = a_{ij} = \quad = a_{nn} = 0$

άρα $(\mathbb{R}^{n \times n}, Tr(uv^t))$ είναι Ευκλείδειος χώρος.

Παράδειγμα 4

$E = \mathbb{R}_n[x] \qquad f(x), g(x) \in \mathbb{R}_n[x]$

$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_0^1 f(x) g(x) dx$

1. (Συμμετρία)

$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_0^1 f(x) g(x) dx = \int_0^1 g(x) \cdot f(x) dx = \langle g(x), f(x) \rangle$

2. (Διγραμμικότητα)

$\langle f_1(x) + f_2(x), g(x) \rangle = \int_0^1 (f_1(x) + f_2(x)) g(x) dx =$

$= \int_0^1 f_1(x) g(x) dx + \int_0^1 f_2(x) g(x) dx = \langle f_1(x), g(x) \rangle + \langle f_2(x), g(x) \rangle$

- $\langle \lambda f(x), g(x) \rangle = \dots = \lambda \langle f(x), g(x) \rangle$

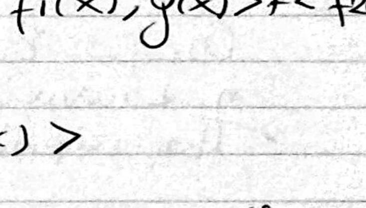
$\langle f(x), g_1(x) + g_2(x) \rangle = \dots = \langle f(x), g_1(x) \rangle + \langle f(x), g_2(x) \rangle$

- $\langle f(x), \lambda \cdot g(x) \rangle = \dots = \lambda \langle f(x), g(x) \rangle$

- (Θετικά ορισμένη)

$\langle f(x), f(x) \rangle = \int_0^1 f(x) \cdot f(x) dx = \int_0^1 f^2(x) dx \geq 0$

Έστω $\langle f(x), f(x) \rangle = 0 \quad \int_0^1 f^2(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0$



Ιδιότητες Εσωτερικού Γινομένου

Έστω $(E, \langle \ \rangle)$ Ευκλείδιος χώρος

i) $\langle \vec{\alpha}, \vec{0} \rangle = \langle \vec{\alpha}, \vec{\alpha} \cdot 0 \rangle = 0 \langle \vec{\alpha}, \vec{\alpha} \rangle = 0$

ii) Έστω ότι $\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = 0$ για κάθε $\vec{\beta} \in E$ τότε $\vec{\alpha} = \vec{0}$

Απόδειξη

$\langle \vec{\alpha}, \vec{\alpha} \rangle = 0 \Rightarrow \vec{\alpha} = \vec{0}$

iii) $\langle \lambda \vec{\alpha}, \mu \vec{\beta} \rangle = \lambda \mu \langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle$

Ορισμός: Έστω $(E, \langle \ \rangle)$ Ευκλείδιος χώρος και $\vec{\alpha} \in E$ τότε ονομάζουμε μήκος του $\vec{\alpha}$ τον πραγματικό αριθμό $\sqrt{\langle \vec{\alpha}, \vec{\alpha} \rangle}$ και το συμβολίζουμε $\|\vec{\alpha}\|$

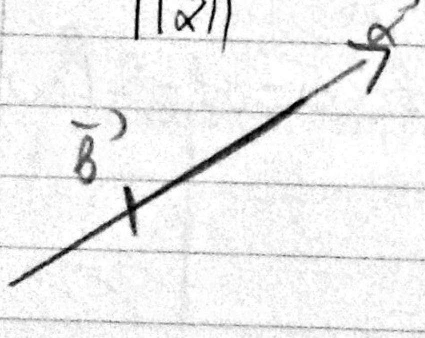
$$\|\vec{\alpha}\| = \sqrt{\langle \vec{\alpha}, \vec{\alpha} \rangle}$$

Ορισμός: Ένα διάνυσμα $\vec{\alpha} \in E$ ονομάζεται μοναδιαίο ή κανονικό αν $\|\vec{\alpha}\| = 1$

Παρατήρηση! $\|\vec{\alpha}\| = 0 \Rightarrow \vec{\alpha} = \vec{0}$

Ορισμός: Τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in E$ ονομάζονται κάθετα αν $\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = 0$, $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$

Παρατήρηση: Έστω $\vec{\alpha} \in E$ με $\|\vec{\alpha}\| \neq 0$. Τότε το διάνυσμα $\vec{\beta} = \frac{1}{\|\vec{\alpha}\|} \vec{\alpha}$ είναι μοναδιαίο (ή κανονικό)



$$\vec{\beta} = \frac{1}{\|\vec{\alpha}\|} \vec{\alpha}$$

Απόδειξη

$\langle \vec{\beta}, \vec{\beta} \rangle = \left\langle \frac{1}{\|\vec{\alpha}\|} \cdot \vec{\alpha}, \frac{1}{\|\vec{\alpha}\|} \cdot \vec{\alpha} \right\rangle = \frac{1}{\|\vec{\alpha}\|} \cdot \frac{1}{\|\vec{\alpha}\|} \cdot \langle \vec{\alpha}, \vec{\alpha} \rangle$

$= \frac{\|a\|^2}{\|a\| \cdot \|a\|} = 1$